

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий  
Кафедра высшей математики и методики преподавания математики



УТВЕРЖДАЮ  
проректор

 П.А. Машаров  
« 29 » марта 2024 г.  
МП

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ**

Укрупненная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки	01.03.01 Математика
Профиль подготовки	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа адаптирована для лиц  
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2024

Рабочая программа дисциплины «Аналитическая теория чисел» для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2024 года.

Разработчик:

профессор кафедры высшей математики  
и методики преподавания математики  
доктор физ.-мат. наук, доцент

 А.В. Зыза

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики  
Протокол от 26.03.2024 г. № 11

Заведующий кафедрой

 Е.И. Скафа

СОГЛАСОВАНО:

Декан факультета математики и  
информационных технологий  
28.03.2024 г.

 И.А. Моисеенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.  
Протокол от 27.03.2024 г. № 3.  
Председатель

 Л. И. Селякова

Руководитель основной профессиональной образовательной программы,  
д-р физ.-мат. наук, зав. каф. МАиДУ, проф.  
26.03.2024 г.

 В.В. Волчков

## 1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: «Высшая алгебра» и «Математический анализ», Комплексный анализ

1.2. Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Дискретная математика, Научные основы элементарной математики и другие.

## 2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы	01.03.01 Математика
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.19 Аналитическая теория чисел
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	3/ 108

### 2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Всего	Форма контроля
			лекци- онных	лабора- торных	практи- ческих	самостоя- тельной работы + контроль			
Очная	2	4	16	-	32	60	108	экзамен	

## 3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Познакомить студентов с основными понятиями и методами теории чисел и современной алгебры.

## 4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

### 4.1. Компетенции

ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.

### 4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-1.6. Осуществляет деятельность на основе использования специальных научных знаний и практических умений в профессиональной деятельности.

### 4.3. Результаты обучения

ОПК-1.6.1. Знает основы теоретических положений высшей алгебры и теории чисел.

ОПК-1.6.2. Умеет составлять алгоритм решения задач, связанных с теорией чисел.

ОПК-1.6.3. Умеет применять общие свойства алгебраических структур к изучению конкретных математических проблем

ОПК-1.6.4. Умеет применять язык современной алгебры для преподавания математических понятий и фактов

## 5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1.	
<b>Тема 1.</b> Теория делимости.	Основные понятия и теоремы. Наибольший общий делитель двух чисел. Алгоритм Евклида и свойства наибольшего общего делителя. Основные теоремы о делимости. Наибольший общий делитель нескольких чисел. Наименьшее общее кратное. Связь алгоритма Евклида с цепными дробями. Приложение непрерывных дробей к решению неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в целых числах. Простые числа. Разложение натурального числа на простые множители. Каноническое разложение. Решето Эратосфена
<b>Тема 2.</b> Важнейшие числовые функции	Числовая функция $[x]$ и ее приложения. Мультипликативные функции. Формулы для числа делителей и суммы делителей данного числа. Функция Эйлера и ее основные свойства
Раздел 2.	
<b>Тема 3.</b> Классы по данному модулю. Сравнения и классы	Сравнения и их основные свойства. Классы чисел по данному модулю. Кольцо классов. Полная система вычетов. Приведенная система вычетов. Мультипликативная группа классов, взаимно простых с модулем. Теоремы Эйлера и Ферма
Раздел 3.	
<b>Тема 4.</b> Сравнения с неизвестной величиной	Классы решений сравнения произвольной степени. Сравнения первой степени. Поле классов по простому модулю. Система сравнений первой степени. Приведение сравнений по составному модулю к системе сравнений по простым модулям. Сравнения $n$ -й степени по простому модулю. Максимальное число решений
Раздел 4.	
<b>Тема 5.</b> Арифметические приложения теории сравнений	Вычисление остатков при делении на данное число. Установление признаков делимости с помощью сравнений. Определение длины периода, получающегося при обращении обыкновенной дроби в десятичную. Проверка результатов арифметических действий
Раздел 5.	
<b>Тема 6.</b> Основы аналитических методов теории чисел	Определение Дзета функции Римана и ее двоякое представление в области абсолютной и равномерной сходимости. Связь двоякого представления Дзета функции и ее объяснение на базе основной теоремы арифметики. Формулировка основного утверждения о функциональном уравнении Дзета функции Римана на всю комплексную плоскость и ее трактовка этой формулы. Эйлеровы интегралы первого рода (бета функции Эйлера) и интегралы второго рода (гамма функции Эйлера). Функциональное уравнение для Дзета функции Римана и ее разложение в комплексный ряд. Некоторые арифметические свойства, касающиеся распределения простых чисел.

## 6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Форма обучения – очная, курс – 2, семестр – 4

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1.	2	-	6	12	20
<b>Тема 1.</b> Теория делимости.	1	-	3	6	10
<b>Тема 2.</b> Важнейшие числовые функции	1	-	3	6	10
Раздел 2.	2	-	6	12	20
<b>Тема 3.</b> Классы по данному модулю. Сравнения и классы	2	-	6	12	20
Раздел 3.	4	-	7	12	23
<b>Тема 4.</b> Сравнения с неизвестной величиной	4	-	7	12	23
Раздел 4.	4	--	6	12	22
<b>Тема 5.</b> Арифметические приложения теории сравнений	4	-	6	12	22
Раздел 5.	4	-	7	12	23
<b>Тема 6.</b> Основы аналитических методов теории чисел	4	-	7	12	23
<b>ИТОГО ЗА СЕМЕСТР</b>	<b>16</b>	<b>--</b>	<b>32</b>	<b>60</b>	<b>108</b>
<b>ИТОГО ПО КОМПОНЕНТУ ОПОП</b>	<b>16</b>	<b>-</b>	<b>32</b>	<b>60</b>	<b>108</b>

## 7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

### 7.1. Контрольные вопросы

#### **Содержательный модуль 1. Теория делимости. Важнейшие числовые функции**

1. Делимость целых чисел (основные понятия, свойства).
2. Теорема (о делимости с остатком). Примеры.
3. Наибольший общий делитель двух чисел.
4. Алгоритм Евклида и свойства наибольшего общего делителя.
5. Основные теоремы о делимости (первая и вторая теоремы).
6. Основные теоремы о делимости (третья и четвертая теоремы).
7. Наибольший общий делитель нескольких чисел.
8. Наименьшее общее кратное двух и более (конечное число) чисел.
9. Понятие цепной дроби. Связь алгоритма Евклида с ценными дробями.
10. Теорема о разложении рационального числа в цепную дробь.
11. Основные свойства подходящих дробей (первая и вторая теоремы).
12. Основные свойства подходящих дробей (третья и четвертая теоремы).
13. Решение линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными.
14. Приложение непрерывных дробей к решению неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными в целых числах.
15. Простые числа. Свойства.
16. Теорема Евклида (о множестве простых чисел).
17. Основная теорема арифметики целых чисел.
18. Решето Эратосфена. Каноническое разложение.

#### **Содержательный модуль 2. Классы по данному модулю. Сравнения и классы**

19. Числовая функция  $[x]$  и ее основные свойства.
20. Приложение числовой функции  $[x]$  (теорема 1).
21. Приложение числовой функции  $[x]$  (теорема 2).
22. Мультипликативные функции и их основные свойства.
23. Вывод формул для числа делителей и суммы делителей данного натурального числа  $n$
24. Функция Эйлера и ее основные свойства.
25. Функция Мебиуса и ее основные свойства.
26. Принцип обращения Дедекинда-Лиувилля.

### **Содержательный модуль 3. Сравнения с неизвестной величиной**

27. Сравнения и их основные свойства.
28. Классы чисел по данному модулю. Кольцо классов.
29. Полная система вычетов и ее основные свойства.
30. Приведенная система вычетов. Мультипликативная группа классов, взаимно простых с модулем.
31. Теоремы Эйлера и Ферма.
32. Классы решений сравнений произвольной степени.
33. Сравнения первой степени. Способы их решений.
34. Система сравнений первой степени и ее решение.
35. Приведение сравнений по составному модулю к системе сравнений по простым модулям.
36. Сравнения  $n$ -й степени по простому модулю. Максимальное число решений.

### **Содержательный модуль 4. Арифметические приложения теории сравнений**

37. Вычисление остатков при делении на данное число.
38. Установление признаков делимости с помощью сравнений
39. Определение длины периода, получающегося при обращении обыкновенной дроби в десятичную.
40. Проверка результатов арифметических действий

### **Содержательный модуль 5. Основы аналитических методов теории чисел**

41. Определение Дзета функции Римана, ее простейшие свойства.
  42. Простейшие теоремы о нулях.
  43. Основная теорема арифметики в расшифровке связи двойного представления Дзета функции Римана.
  44. Основное утверждение о функциональном уравнении Дзета функции Римана на всей комплексной плоскости.
  45. Бетта функция Эйлера и интеграл Дирихле.
  46. Некоторые арифметические свойства относительно распределения простых чисел.
- 7.2. Образец содержания экзаменационного билета

### **ФГБОУ ВО «ДОНЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Образовательный уровень: бакалавриат

Направление подготовки: 01.03.01 Математика

Очная форма обучения. Семестр: 2

Учебная дисциплина: Аналитическая теория чисел

### Экзаменационный билет № n

1. Индексы и индексирование. Применение индексов к решению двучленных сравнений.
2. Найти НОД ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ), если  $a = 176824$ ,  $b = 513298$ ,  $c = 549444$ .
3. Решить уравнение  $\varphi(n) = 64$ .
4. Докажите, что для любого  $a \in \mathbb{N}$ ,  $a \neq 2$  найдется четное число  $n > 2$  такое, что  $a^n \equiv a \pmod{n}$ .

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и методики преподавания математики, протокол № \_\_\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Экзаменатор \_\_\_\_\_

В случае ведения учебного процесса с использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий, содержание билета может отличаться от приведенного.

## 8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже. Организационно-учебная работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, имеет право получить оценку (зачет). Те, кого набранные баллы не устраивают, сдают экзамен (сдают индивидуальные задания, выполняют зачетную контрольную работу). Максимальное количество баллов за экзамен – 100. Оценка за семестр вычисляется как максимальная из полученных за семестр и на экзамене и выставляется согласно принятому порядку.

### 8.1. Семестр 2

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-5	Организационно-учебная работа студента в аудитории	10
	Самостоятельная работа	20
	Модульная контрольная работа	30
	<b>Итого</b>	<b>60</b>
Экзамен		40
Общий итог за семестр		100

### Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено

80-89	B	хорошо	зачтено
75-79	C		зачтено
70-74	D	удовлетворительно	зачтено
60-69	E		зачтено
35-59	FX	неудовлетворительно	не зачтено
0-34	F		не зачтено

## 9. ОБЕСПЕЧЕНИЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ЛИЦ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ И ИНВАЛИДОВ

В ходе реализации дисциплины используются следующие дополнительные методы обучения, текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся в зависимости от их индивидуальных особенностей:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - для выполнения задания при необходимости предоставляется увеличивающее устройство; возможно также использование собственных увеличивающих устройств;
  - письменные задания оформляются увеличенным шрифтом.
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - лекции оформляются в виде электронного документа;
  - письменные задания выполняются на компьютере в письменной форме;
  - экзамен проводится в письменной форме на компьютере; возможно проведение в форме тестирования.
- 3) для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - лекции оформляются в виде электронного документа, доступного с помощью компьютера со специализированным программным обеспечением;
  - письменные задания выполняются на компьютере;
  - экзамен и зачёт проводятся в устной форме или выполняются в письменной форме на компьютере.

При необходимости предусматривается увеличение времени для подготовки ответа.

Процедура проведения промежуточной аттестации для обучающихся устанавливается с учётом их индивидуальных психофизических особенностей. Промежуточная аттестация может проводиться в несколько этапов.

Проведение процедуры оценивания результатов обучения допускается с использованием дистанционных образовательных технологий.

Обеспечивается доступ к информационным и библиографическим ресурсам в сети Интернет для каждого обучающегося в формах, адаптированных к ограничениям их здоровья и восприятия информации:

- 1) для слепых и слабовидящих:
  - в печатной форме увеличенным шрифтом;
  - в форме электронного документа;
- 2) для глухих и слабослышащих:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.
- 3) для обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата:
  - в печатной форме;
  - в форме электронного документа.



## 10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения лабораторных занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.705).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины применяются электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

## 11. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

### 11.1. Основная литература

1. Нестеренко Ю.В. Теория чисел : учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Математика" / Ю. В. Нестеренко. – Москва : Академия, 2008. – 264 с.
2. Виноградов И.М. Основы теории чисел [Электронный ресурс] / И. М. Виноградов. – Москва : Юрайт, 2018.
3. Бородин А.И. Теория чисел учебное пособие. – К. «Высшая школа» - 1992 – 288с.
4. Карацуба А.А. «Основы аналитической теории чисел», Москва. Наука. 1963.
5. Фихтенгольц Г.М. «Курс дифференциального и интегрального исчисления», том 1,2, «Наука», М., 1969.

### 11.2. Дополнительная литература

1. Дирихле П.Г.Л. Лекции по теории чисел = Vorlesungen Uber Zahlentheorie : в обработке и с добавлениями Р.Дедекинда / П. Г. Дирихле ; пер. с нем. А. И. и
2. С. И. Каменецких ; под ред. Б. И. Сегала. – изд. 3-е. – Москва : Либроком, 2009. – 369 с.
3. Курош А.Г. Теория групп / А. Г. Курош. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург и др. : Лань, 2005. – 648 с.
4. Курош А.Г. Курс высшей алгебры : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика", "Прикладная математика" / А. Г. Курош. – 17-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2008. – 431 с.
5. Сборник задач по алгебре : [учеб. пособие] / [В. А. Артамонови и др.] ; под ред. А. И. Кострикина. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Москва : Физматлит, 2001. – 463 с.
6. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учеб. пособие / И.В. Проскуряков. – Изд. 13-е, стер. – Санкт-Петербург : Лань ; Москва, 2010. – 480 с.

## 12. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская

государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный, подписка. Необходима установка программного обеспечения. – Текст: электронный.

2. **eLIBRARY.RU**: научная электронная библиотека: сайт. – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

3. Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»: сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/>. – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

4. Электронно-библиотечная система «Лань»: [сайт]. – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

5. **ЭБС Юрайт**: электронная библиотечная система: сайт. – Москва, 2013. – URL: <https://biblio-online.ru> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

6. **Электронно-библиотечная система ДонГУ**: сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

7. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

8. **Электронный архив** ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 01.09.2023). – Режим доступа: свободный.

### 13. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Windows 7 PRO (корпоративная лицензия ДонГУ № 46484614)
2. Microsoft Office (корпоративная лицензия ДонГУ № 46472919)
3. Microsoft Visual Studio (лицензия программы Dream Spark для высших учебных заведений)
4. Антивирус Касперского, Adobe Acrobat Reader, xPDF (лицензии GPL, Apache, BSD для свободного программного обеспечения).